

盐城市、南京市 2022—2023 学年度第一学期期末调研测试

高三数学

2023.01

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. “ $a_3 + a_9 = 2a_6$ ” 是 “数列 $\{a_n\}$ 为等差数列” 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
2. 若复数 z 满足 $|z-1| \leq 2$, 则复数 z 在复平面内对应点组成图形的面积为
A. π B. 2π C. 3π D. 4π
3. 已知集合 $A = \{x | \frac{x-1}{x-a} < 0\}$, 若 $A \cap \mathbb{N}^* = \infty$, 则实数 a 的取值范围是
A. $\{1\}$ B. $(-\infty, 1)$ C. $[1, 2]$ D. $(-\infty, 2]$
4. 把 5 个相同的小球分给 3 个小朋友, 使每个小朋友都能分到小球的分法有
A. 4 种 B. 6 种 C. 21 种 D. 35 种
5. 某研究性学习小组发现, 由双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的两渐近线所成的角可求离心率 e 的大小, 联想到反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象也是双曲线, 据此可进一步推断双曲线 $y = \frac{5}{x}$ 的离心率为
A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 5

6. $\triangle ABC$ 中, AH 为 BC 边上的高且 $\overrightarrow{BH}=3\overrightarrow{HC}$, 动点 P 满足 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$, 则点 P 的轨迹一定过 $\triangle ABC$ 的

- A. 外心 B. 内心 C. 垂心 D. 重心

7. 若函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 满足 $f(1-x)+f(1+x)=0$ 对一切实数 x 恒成立, 则不等式 $f(2x+3)<f(x-1)$ 的解集为

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, -4)$ C. $(-4, 0)$ D. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

8. 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB=3AD$, 点 E, F 分别是 AB, CD 的中点, 将四边形 $AEFD$ 绕 EF 旋转至与四边形 $BEFC$ 重合, 则直线 ED, BF 所成角 α 在旋转过程中

- A. 逐步变大 B. 逐步变小 C. 先变小后变大 D. 先变大后变小

二、多项选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则下列说法正确的有

- A. $P(X < \mu + \sigma) = P(X > \mu - \sigma)$
B. $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma) < P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$
C. $P(X < \mu + \sigma)$ 不随 μ, σ 的变化而变化
D. $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$ 随 μ, σ 的变化而变化

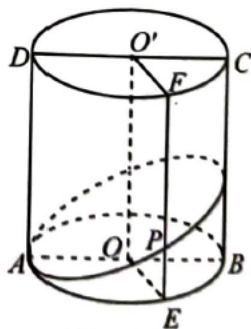
10. 已知函数 $f(x)=3\sin x-4\cos x$. 若 $f(\alpha), f(\beta)$ 分别为 $f(x)$ 的极大值与极小值, 则

- A. $\tan \alpha = -\tan \beta$ B. $\tan \alpha = \tan \beta$
C. $\sin \alpha = -\sin \beta$ D. $\cos \alpha = -\cos \beta$

11. 已知直线 l 的方程为 $(a^2-1)x-2ay+2a^2+2=0, a \in \mathbf{R}, O$ 为原点, 则

- A. 若 $OP \leq 2$, 则点 P 一定不在直线 l 上 B. 若点 P 在直线 l 上, 则 $OP \geq 2$
C. 直线 l 上存在定点 P D. 存在无数个点 P 总不在直线 l 上

12. 如图, 圆柱 OO' 的底面半径为 1, 高为 2, 矩形 $ABCD$ 是其轴截面, 过点 A 的平面 α 与圆柱底面所成的锐二面角为 θ , 平面 α 截圆柱侧面所得的曲线为椭圆 Ω , 截母线 EF 得点 P , 则



(第 12 题图)

- A. 椭圆 Ω 的短轴长为 2
 B. $\tan\theta$ 的最大值为 2
 C. 椭圆 Ω 的离心率的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 D. $EP = (1 - \cos\angle AOE)\tan\theta$

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. $(2x + \frac{1}{x})^5$ 展开式中 x^3 的系数为 ▲ .

14. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 则使 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上为增函数的 ω 的值可以为 ▲ (写出一个即可)

15. 在概率论中常用散度描述两个概率分布的差异. 若离散型随机变量 X, Y 的取值集合均为 $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 X, Y 的散度 $D(X \| Y) = \sum_{i=0}^n P(X=i) \ln \frac{P(X=i)}{P(Y=i)}$. 若 X, Y 的概率分布如下表所示, 其中 $0 < p < 1$, 则 $D(X \| Y)$ 的取值范围是 ▲ .

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1
P	$1-p$	p

16. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}}, & n=2k-1, \\ \sqrt{a_{n+1}}, & n=2k, \end{cases}$ 其中 $k \in \mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 是

公比为 q 的等比数列, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$ ▲ (用 q 表示); 若 $a_2 + b_2 = 24$, 则 $a_5 =$ ▲ .

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-4n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 判断数列 $\{a_n-2n-1\}$ 是否是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{(2n-1)2^n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AC=2$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, P 为 $\triangle ABC$ 内的一点, 满足 $AP \perp CP$, $\angle APB = \frac{2\pi}{3}$.

(1) 若 $AP=PC$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $BC=\sqrt{7}$, 求 AP .

19. (本小题满分 12 分)

为深入贯彻党的教育方针，全面落实《中共中央国务院关于全面加强新时代大中小学劳动教育的意见》，某校从 2022 年起积极推进劳动课程改革，先后开发开设了具有地方特色的家政、烹饪、手工、园艺、非物质文化遗产等劳动实践类校本课程。为调研学生对新开设劳动课程的满意度并不断改进劳动教育，该校从 2022 年 1 月到 10 月每两个月从全校 3000 名学生中随机抽取 150 名学生进行问卷调查，统计数据如下表：

月份 x	2	4	6	8	10
满意人数 y	80	95	100	105	120

(1)由表中看出，可用线性回归模型拟合满意人数 y 与月份 x 之间的关系，求 y 关于 x 的回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ ，并预测 12 月份该校全体学生中对劳动课程的满意人数；

(2)10 月份时，该校为进一步深化劳动教育改革，了解不同性别的学生对劳动课程是否满意，经调研得如下统计表：

	满意	不满意	合计
男生	65	10	75
女生	55	20	75
合计	120	30	150

请根据上表判断是否有 95%的把握认为该校的学生性别与对劳动课程是否满意有关？

参考公式： $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}=\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a}=\bar{y} - \hat{b} \bar{x}$ 。

$P(K^2\geq k)$	0. 10	0. 05	0. 025	0. 010	0. 005
----------------	-------	-------	--------	--------	--------

k	2. 706	3. 841	5. 024	6. 635	7. 879
-----	--------	--------	--------	--------	--------

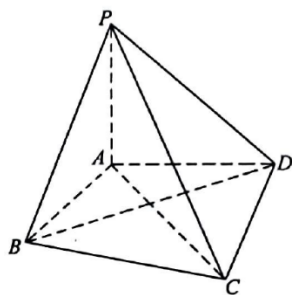
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n=a+b+c+d.$$

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \perp AD$, 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD , $AB=AD=AP=2$, 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 4.

(1) 求证: $BD \perp PC$;

(2) 求平面 PAD 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值.



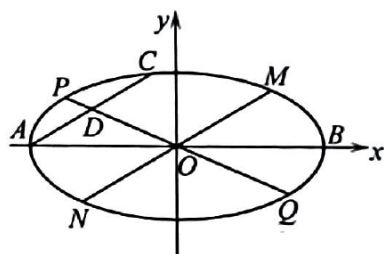
(第 20 题图)

21. (本小题满分 12 分)

如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右顶点分别为 A, B , 点 C 是椭圆上异于 A, B 的动点, 过原点 O 平行于 AC 的直线与椭圆交于点 M, N , AC 的中点为点 D , 直线 OD 与椭圆交于点 P, Q , 点 P, C, M 在 x 轴的上方.

(1) 当 $AC = \sqrt{5}$ 时, 求 $\cos \angle POM$;

(2) 求 $PQ \cdot MN$ 的最大值.



(第 21 题图)

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

(1) 当 $x > -1$ 时, 求函数 $g(x) = f(x) + x^2 - 1$ 的最小值;

(2) 已知 $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = f(x_2) = t$, 求证: $|x_1 - x_2| > 2\sqrt{1-t}$.

盐城市、南京市 2022—2023 学年度第一学期期末调研测试

高三数学

2023.01

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. “ $a_3+a_9=2a_6$ ” 是 “数列 $\{a_n\}$ 为等差数列” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

【答案】B

【解析】如果数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则一定有 $a_3+a_9=2a_6$; 反之, $a_3+a_9=2a_6$ 不一定有数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 故选择 B.

2. 若复数 z 满足 $|z-1|\leq 2$, 则复数 z 在复平面内对应点组成图形的面积为

- A. π B. 2π C. 3π D. 4π

【答案】D

【解析】 z 在复平面对应的点是半径为 2 的圆及圆内所有点, $S=4\pi$, 故选择 D.

3. 已知集合 $A=\{x|\frac{x-1}{x-a}<0\}$, 若 $A\cap\mathbf{N}^*=\emptyset$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $\{1\}$ B. $(-\infty, 1)$ C. $[1, 2]$ D. $(-\infty, 2]$

【答案】D

【解析】若 $a>1$, 则 $A=(1, a)$, 故 $a\leq 2$; 若 $a=1$, $A=\emptyset$; 若 $a<1$, 则 $A=(a, 1)$, 满足条件. 综上, 选择 D.

4. 把 5 个相同的小球分给 3 个小朋友, 使每个小朋友都能分到小球的分法有

- A. 4 种 B. 6 种 C. 21 种 D. 35 种

【答案】B

【解析】插板法: $C_4^2=6$, 故选择 B.

5. 某研究性学习小组发现, 由双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a, b>0)$ 的两渐近线所成的角可求离心率 e 的大小, 联

想到反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象也是双曲线，据此可进一步推断双曲线 $y = \frac{5}{x}$ 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 5

【答案】A

【解析】双曲线 $y = \frac{5}{x}$ 两渐近线垂直，故为等轴双曲线，离心率为 $\sqrt{2}$ ，故选择 A.

6. $\triangle ABC$ 中， AH 为 BC 边上的高且 $\overrightarrow{BH} = 3\overrightarrow{HC}$ ，动点 P 满足 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$ ，则点 P 的轨迹一定过 $\triangle ABC$ 的

- A. 外心 B. 内心 C. 垂心 D. 重心

【答案】A

【解析】 A 在 BC 上的投影是 BC 上靠近 C 点的四等分点，由 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$ 件 P 的投影为 BC 的中点，故选择 A.

7. 若函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 满足 $f(1-x) + f(1+x) = 0$ 对一切实数 x 恒成立，则不等式 $f'(2x+3) < f'(x-1)$ 的解集为

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, -4)$ C. $(-4, 0)$ D. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

【答案】C

【解析】由 $f(1-x) + f(1+x) = 0$ 知，点 $(1, 0)$ 为函数 $f(x)$ 图像的对称中心， $f'(x)$ 图像的开口向上，对称轴为 $x = 1$ ，由 $f'(2x+3) < f'(x-1)$ 得 $|2x+3-1| < |x-1-1|$ ，解得 $-4 < x < 0$ ，故选择 C.

8. 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB = 3AD$ ，点 E, F 分别是 AB, CD 的中点，将四边形 $AEFD$ 绕 EF 旋转至与四边形 $BEFC$ 重合，则直线 ED, BF 所成角 α 在旋转过程中

- A. 逐步变大 B. 逐步变小 C. 先变小后变大 D. 先变大后变小

【答案】D

【解析】初始时刻 ED 与 BF 所成角为 0 ，故 B, C 错误，由三垂线定理知，当 D 在平面 $BCFE$ 内的投影在与 BF 垂直的线段上时， DE 与 BF 所成角为 $\frac{\pi}{2}$ ，故选 D.

二、多项选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分)

9. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则下列说法正确的有

- A. $P(X < \mu + \sigma) = P(X > \mu - \sigma)$

B. $P(\mu-2\sigma < X < \mu+\sigma) < P(\mu-\sigma < X < \mu+2\sigma)$

C. $P(X < \mu+\sigma)$ 不随 μ, σ 的变化而变化

D. $P(\mu-2\sigma < X < \mu+\sigma)$ 随 μ, σ 的变化而变化

【答案】 AC

【解析】 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $P(X < \mu + \sigma) = P(X > \mu - \sigma)$, A 对.

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$, B 错.

$P(X < \mu + \sigma)$ 为定值不改变, C 对.

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$ 为定值不改变, D 错.

10. 已知函数 $f(x) = 3\sin x - 4\cos x$. 若 $f(\alpha), f(\beta)$ 分别为 $f(x)$ 的极大值与极小值, 则

A. $\tan \alpha = -\tan \beta$

B. $\tan \alpha = \tan \beta$

C. $\sin \alpha = -\sin \beta$

D. $\cos \alpha = -\cos \beta$

【答案】 BCD

【解析】 $f(x) = 5\left(\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x\right) = 5\sin(x - \varphi)$, 其中 $\cos \varphi = \frac{3}{5}, \sin \varphi = \frac{4}{5}$,

当 $x - \varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, 取极大值, 即 $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$;

当 $x - \varphi = -\frac{\pi}{2}$ 时取极小值, 即 $\beta = \varphi - \frac{\pi}{2}$,

$\therefore \tan \beta = \tan\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\varphi - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = \tan \alpha$, A 错, B 对.

$\sin \alpha = -\sin \beta$, C 对, $\cos \alpha = -\cos \beta$, D 对, 选 BCD.

11. 已知直线 l 的方程为 $(a^2 - 1)x - 2ay + 2a^2 + 2 = 0$, $a \in \mathbf{R}$, O 为原点, 则

A. 若 $OP \leq 2$, 则点 P 一定不在直线 l 上

B. 若点 P 在直线 l 上, 则 $OP \geq 2$

C. 直线 l 上存在定点 P

D. 存在无数个点 P 总不在直线 l 上

【答案】BD

【解析】 O 到 l 的距离 $d = \frac{2(a^2+1)}{\sqrt{(a^2-1)^2+4a^2}} = 2$ ， $OP \leq 2$ 则 P 有可能在直线上，A 错.

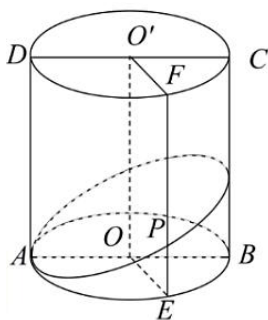
点 P 在直线 l 上一定有 $OP \geq 2$ ，B 对.

$$(a^2-1)x - 2ay + 2a^2 + 2 = 0, \quad a^2(x+2) - a \cdot 2y + 2 - x = 0,$$

$$\begin{cases} x+2=0 \\ 2y=0 \\ 2-x=0 \end{cases} \text{ 无解, 直线 } l \text{ 不过定点, 一定存在无数个点 } P \text{ 总不在直线 } l \text{ 上, D 对.}$$

选 BD.

12. 如图，圆柱 OO' 的底面半径为 1，高为 2，矩形 $ABCD$ 是其轴截面，过点 A 的平面 α 与圆柱底面所成的锐二面角为 θ ，平面 α 截圆柱侧面所得的曲线为椭圆 Ω ，截母线 EF 得点 P ，则



(第 12 题图)

A. 椭圆 Ω 的短轴长为 2

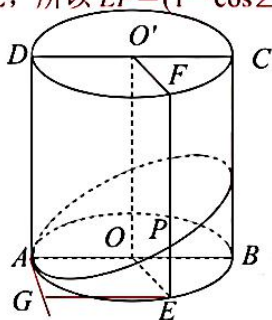
B. $\tan\theta$ 的最大值为 2

C. 椭圆 Ω 的离心率的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $EP = (1 - \cos\angle AOE)\tan\theta$

【答案】ACD

【解析】椭圆 Ω 在底面上的投影为底面圆 O ，所以短轴长为底面圆直径，即为 2，故 A 正确； $\tan\theta$ 的最大值为 $\tan\angle CAB = 1$ ，所以 B 错误；椭圆短轴长为定值 2，所以长轴长最长为 AC 时，离心率最大为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，C 正确；过 E 作椭圆 Ω 所在平面和底面的交线垂线，垂足为 G ，则 $EG = 1 - \cos\angle AOE$ ，所以 $EP = (1 - \cos\angle AOE)\tan\theta$ ，D 正确。故选 ACD.



第 II 卷(非选择题 共 90 分)

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. $(2x + \frac{1}{x})^5$ 展开式中 x^3 的系数为 ▲ .

【答案】 80

【解析】 $(2x + \frac{1}{x})^5$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_5^r 2^{5-r} x^{5-r-r}$,

$r=1$ 时, $T_2 = C_5^1 2^4 x^3 = 80x^3$, $\therefore x^3$ 的系数为 80.

14. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$ 则使 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上为增函数的 ω 的值可以为 ▲ (写出一个即可)

【答案】 x , 其中 $x \in (0, \frac{1}{3}]$.

【解析】 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上为增函数, 则 $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, 解得 $0 < \omega \leq \frac{1}{3}$.

15. 在概率论中常用散度描述两个概率分布的差异. 若离散型随机变量 X, Y 的取值集合均为 $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 X, Y 的散度 $D(X \| Y) = \sum_{i=0}^n P(X=i) \ln \frac{P(X=i)}{P(Y=i)}$. 若 X, Y 的概率分布如下表所示, 其中 0

$< p < 1$, 则 $D(X \| Y)$ 的取值范围是 ▲ .

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1
P	$1-p$	p

【答案】 $[0, +\infty)$

【解析】 $D(X \| Y) = P(X=0) \ln \frac{P(X=0)}{P(Y=0)} + P(X=1) \ln \frac{P(X=1)}{P(Y=1)}$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{1}{2}}{1-p} + \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{1}{2}}{p} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{1}{4}}{p(1-p)}, \quad p(1-p) \in \left(0, \frac{1}{4}\right],$$

$$\therefore \frac{1}{p(1-p)} \in [1, +\infty), \quad \therefore D(X \| Y) \geq 0.$$

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} a_{n+1}, & n=2k-1, \\ \sqrt{\frac{2}{a_{n+1}}}, & n=2k, \end{cases}$ 其中 $k \in \mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

▲(用 q 表示); 若 $a_2+b_2=24$, 则 $a_5=$ ▲.

【答案】 q^2 ; 1024

【解析】 n 为奇数时, $b_n = a_{\frac{n+1}{2}}$, $\therefore b_{2n+1} = a_{n+1}$, $b_{2n-1} = a_n$,

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{2n+1}}{b_{2n-1}} = q^2, b_1 = a_1, b_2 = \sqrt{a_3}, b_3 = a_2, b_2^2 = b_1 b_3, \therefore a_3 = a_1 a_2.$$

$$\therefore a_2 q^2 = \frac{a_2}{q^2} \cdot a_2, \therefore a_2 = q^4.$$

$$b_2 = \sqrt{a_3} = \sqrt{a_2 q^2} = q^3, q^4 + q^3 = 24, q = 2, a_5 = a_2 q^6 = q^{10} = 1024.$$

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-4n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 判断数列 $\{a_n-2n-1\}$ 是否是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{(2n-1)2^n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

解:(1) $a_1-2-1=0$, 故数列 $\{a_n-2n-1\}$ 不是等比数列.

因为 $a_{n+1}=3a_n-4n$,

所以 $a_{n+1}-2(n+1)-1=3a_n-4n-2(n+1)-1=3(a_n-2n-1)=\cdots=3^n(a_1-2-1)=0$,

所以 $a_n=2n+1$.

$$(2) b_n = \frac{(2n-1)2^n}{a_n a_{n+1}} = \frac{(2n-1)2^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2^{n+1}}{2n+3} - \frac{2^n}{2n+1},$$

$$\text{所以 } S_n = \left(\frac{2^{n+1}}{2n+3} - \frac{2^n}{2n+1}\right) + \cdots + \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2^{n+1}}{2n+3} - \frac{2}{3}.$$

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AC=2$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$, P 为 $\triangle ABC$ 内的一点, 满足 $AP \perp CP$, $\angle APB=\frac{2\pi}{3}$.

(1) 若 $AP=PC$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $BC=\sqrt{7}$, 求 AP .

解:(1) 在 $\triangle APC$ 中, 因为 $AP \perp CP$, 且 $AP=CP$, 所以 $\angle CAP=\frac{\pi}{4}$.

由 $AC=2$, 可得 $AP=\sqrt{2}$.

又 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, 则 $\angle BAP = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

在 $\triangle APB$ 中, 因为 $\angle APB = \frac{2\pi}{3}$, $\angle BAP = \frac{\pi}{12}$, 所以 $\angle ABP = \pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$,

则 $\frac{AB}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{4}}$, 解得 $AB = \sqrt{3}$,

从而 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $7 = 4 + AB^2 - 2AB$,

解得 $AB = 3$ ($AB = -1$ 舍去). 令 $\angle CAP = \alpha$, 则在 $\triangle APC$ 中 $AP = 2\cos\alpha$.

在 $\triangle ABP$ 中, $\angle BAP = \frac{\pi}{3} - \alpha$, 所以 $\angle ABP = \pi - \frac{2\pi}{3} - (\frac{\pi}{3} - \alpha) = \alpha$,

则 $\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{AP}{\sin \angle ABP}$, 即 $\frac{3}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}$, 得 $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{3})$, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{6}$,

从而 $AP = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

19. (本小题满分 12 分)

为深入贯彻党的教育方针, 全面落实《中共中央国务院关于全面加强新时代大中小学劳动教育的意见》, 某校从 2022 年起积极推进劳动课程改革, 先后开发开设了具有地方特色的家政、烹饪、手工、园艺、非物质文化遗产等劳动实践类校本课程. 为调研学生对新开设劳动课程的满意度并不断改进劳动教育, 该校从 2022 年 1 月到 10 月每两个月从全校 3000 名学生中随机抽取 150 名学生进行问卷调查, 统计数据如下表:

月份 x	2	4	6	8	10
满意人数 y	80	95	100	105	120

(1) 由表中看出, 可用线性回归模型拟合满意人数 y 与月份 x 之间的关系, 求 y 关于 x 的回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 并预测 12 月份该校全体学生中对劳动课程的满意人数;

(2) 10 月份时, 该校为进一步深化劳动教育改革, 了解不同性别的学生对劳动课程是否满意, 经调研得如下统计表:

	满意	不满意	合计
--	----	-----	----

男生	65	10	75
女生	55	20	75
合计	120	30	150

请根据上表判断是否有 95%的把握认为该校的学生性别与对劳动课程是否满意有关？

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0. 10	0. 05	0. 025	0. 010	0. 005
k	2. 706	3. 841	5. 024	6. 635	7. 879

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n=a+b+c+d.$$

解：（1）由题意可得 $\bar{x} = 6$, $\bar{y} = (80+95+100+105+120) \div 5 = 100$,

$$\text{则 } \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (2-6) \times (80-100) + (4-6) \times (95-100) + (6-6) \times (100-100) + \dots + \dots$$

$$+(8-6) \times (105-100) + (10-6) \times (120-100) = 180,$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (2-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2 = 40,$$

$$\text{可得 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{180}{40} = \frac{9}{2}, \quad \hat{a} = 100 - \frac{9}{2} \times 6 = 73,$$

故 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y} = \frac{9}{2}x + 73$.

令 $x = 12$, 得 $\hat{y} = 127$,

据此预测 12 月份该校全体学生中对劳动课程的满意人数为 $3000 \times \frac{127}{150} = 2540$ 人.

(2) 提出假设 H_0 : 该校的学生性别与对劳动课程是否满意无关.

$$\text{则 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{150(65 \times 20 - 55 \times 10)^2}{120 \times 30 \times 75 \times 75} = \frac{25}{6} \approx 4.17.$$

因为 $P(K^2 \geq 3.841) = 0.05$, 而 $4.17 > 3.841$,

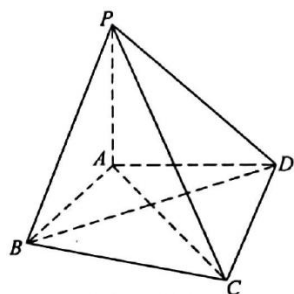
故有 95% 的把握认为该校的学生性别与对劳动课程是否满意有关.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \perp AD$, 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD , $AB = AD = AP = 2$, 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 4.

(1) 求证: $BD \perp PC$;

(2) 求平面 PAD 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值.



(第 20 题图)

(1) 证明: 设 $AC \cap BD = O$, 在平面 PAC 内过点 A 作 $AH \perp PO$, 垂足为 H .

因为平面 $PAC \perp$ 平面 PBD , 平面 $PAC \cap$ 平面 $PBD = PO$,

所以 $AH \perp$ 平面 PBD .

又 $BD \subset$ 平面 PBD , 所以 $BD \perp AH$.

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BD \perp PA$.

因为 $BD \perp AH$, $PA \cap AH = A$, $PA \subset$ 平面 PAC , $AH \subset$ 平面 PAC ,

所以 $BD \perp$ 平面 PAC .

又因为 $PC \subset$ 平面 PAC , 所以 $BD \perp PC$.

(2) 在 $\triangle ABD$ 中, 由 $AB = AD = 2$, $AB \perp AD$, 可得 $BD = 2\sqrt{2}$.

由 (1) 知 $BD \perp AC$, 则 $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times PA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times AC \times 2 = 4$,

解得 $AC = 3\sqrt{2}$,

以 $\{\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AP}\}$ 为正交基底建立如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$,

得 $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $C(3, 3, 0)$, $P(0, 0, 2)$,

所以平面 PAD 的一个法向量为 $n_1 = (1, 0, 0)$.

设平面 PCD 的一个法向量为 $n_2 = (x, y, z)$,

又 $\vec{PD} = (0, 2, -2)$, $\vec{PC} = (3, 3, -2)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{PD} \cdot n_2 = 0, \\ \vec{PC} \cdot n_2 = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} 2y - 2z = 0, \\ 3x + 3y - 2z = 0, \end{cases}$$

取 $z = 3$, 则 $x = -1$, $y = 3$, 故平面 PCD 的一个法向量为 $n_2 = (-1, 3, 3)$,

$$\cos \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{-1}{1 \times \sqrt{1+9+9}} = -\frac{\sqrt{19}}{19},$$

平面 PAD 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{19}}{19}$.

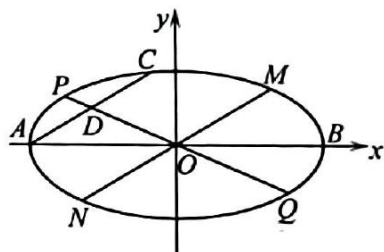
21. (本小题满分 12 分)

如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右顶点分别为 A, B , 点 C 是椭圆上异于 A, B 的动点, 过原点 O 平行

于 AC 的直线与椭圆交于点 M, N , AC 的中点为点 D , 直线 OD 与椭圆交于点 P, Q , 点 P, C, M 在 x 轴的上方.

(1) 当 $AC = \sqrt{5}$ 时, 求 $\cos \angle POM$;

(2) 求 $PQ \cdot MN$ 的最大值.



(第 21 题图)

解: 设 $C(x_0, y_0)$, 则 $D(\frac{x_0-2}{2}, \frac{y_0}{2})$, 则 $k_{AC}k_{OD} = \frac{y_0}{x_0+2} \cdot \frac{y_0}{x_0-2} = \frac{1-\frac{1}{4}x_0^2}{x_0^2-4} = -\frac{1}{4}$.

(1) C 在圆 $(x+2)^2 + y^2 = 5$ 上, 又 C 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上,

所以 $C(x, y)$ 满足 $\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 5, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 所以 $(x+2)^2 + 1 - \frac{x^2}{4} = 5$,

$\frac{3}{4}x^2 + 4x = 0$, 所以 $x_0 = 0$ 或 $x_0 = -\frac{16}{3} < -2$ 舍去,

又 C 在 x 轴上方, 所以 $C(0, 1)$, 所以 AC 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 故 OD 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 设 AC 的倾斜角 θ ,

$\cos \angle POM = -\cos 2\theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{\tan^2 \theta - 1}{\tan^2 \theta + 1} = -\frac{3}{5}$.

(2) 当 MN 斜率为 k , $k > 0$, 则 $MN: y = kx$,

$$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) \text{ 满足 } \begin{cases} y=kx, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases} \text{ 所以 } (4k^2+1)x^2=4, x^2=\frac{4}{4k^2+1},$$

$$\text{所以 } MN^2=(1+k^2)\frac{16}{4k^2+1},$$

$$\text{同理 } PQ^2=(1+\frac{1}{16k^2})\frac{16}{\frac{1}{4k^2}+1}=\frac{4(16k^2+1)}{4k^2+1},$$

$$\text{所以 } MN^2PQ^2=\frac{16(4k^2+4)(16k^2+1)}{(4k^2+1)^2}\leqslant\frac{4(20k^2+5)^2}{(4k^2+1)^2}=100,$$

所以 $MN \cdot PQ \leqslant 10$, 当且仅当 $4k^2+4=16k^2+1$, 即 $k=\frac{1}{2}$ 时取 “=”,

所以 $PQ \cdot MN$ 的最大值为 10.

22. (本小题满分 12 分)

$$\text{已知函数 } f(x)=\frac{x+1}{e^x}.$$

(1) 当 $x > -1$ 时, 求函数 $g(x)=f(x)+x^2-1$ 的最小值;

(2) 已知 $x_1 \neq x_2$, $f(x_1)=f(x_2)=t$, 求证: $|x_1-x_2| > 2\sqrt{1-t}$.

解: (1) $g'(x)=\frac{-x}{e^x}+2x=\frac{x(2e^x-1)}{e^x}$, 令 $f'(x)=0$, 则 $x=0$ 或 $x=-\ln 2$,

列表如下:

x	$(-1, -\ln 2)$	$-\ln 2$	$(-\ln 2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	增	极大值	减	极小值	增

$x \rightarrow -1$ 时 $g(x) \rightarrow g(-1)=0$, $g(0)=0$,

所以 $g(x)_{\min}=g(0)=0$.

(2) $f'(x)=\frac{-x}{e^x}$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调增, $(0, +\infty)$ 上单调减,

因为 $f(x_1)=f(x_2)$,

不妨设 $x_1 < 0 < x_2$, 因为 $x_2 > 0$ 时, $f(x_2) > 0$, $t = f(x_2) \in (0, 1)$,

所以 $f(x_1) = f(x_2) > 0$, 所以 $x_1 > -1$,

由(1)知 $x > -1$, 且 $x \neq 0$ 时, $g(x) = f(x) + x^2 - 1 > 0$, 所以 $f(x) > 1 - x^2$,

$t = f(x_1) > 1 - x_1^2$, $x_1 < -\sqrt{1-t}$, $t = f(x_2) > 1 - x_2^2$, 所以 $x_2 > \sqrt{1-t}$,

$$|x_1 - x_2| = x_2 - x_1 > 2\sqrt{1-t}.$$